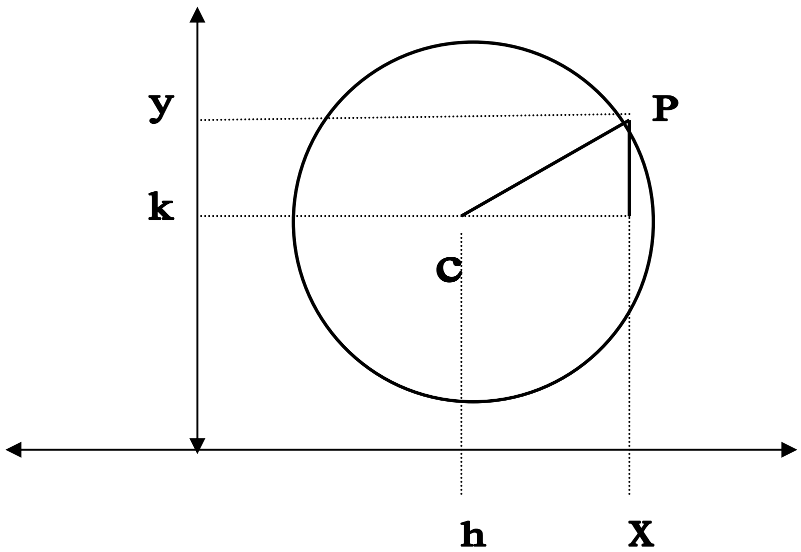
Guía Conceptual de Álgebra
Tema: Metrica Cartesiana de las Cónicas.
Montoya

Cónicas

METRICA DE LA CIRCUNFERENCIA

Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado centro.



CP=Radio

$R^2 = CM^2 + MP^2$

Ecuación Canónica

$$\boxed{R^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - R^2 = 0$
$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - R^2 = 0$

$-2h = D$
$-2k = E$
$h^2 + k^2 - R^2 = F$

Al remplazar , finalmente queda:
Ecuación General

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Además:
C (H,K) H = - D/2 ; K = -E/2
$R^2 = h^2 + k^2 - F$

$R^2 = \frac{1}{4}(d^2 + e^2 - 4f)$

$$\boxed{R = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}}$$

<u>Ejemplos Prácticos</u>

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (1,2) y de radio 3.

Se reemplaza en la ecuación canónica quedando:

$3^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$
$9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$

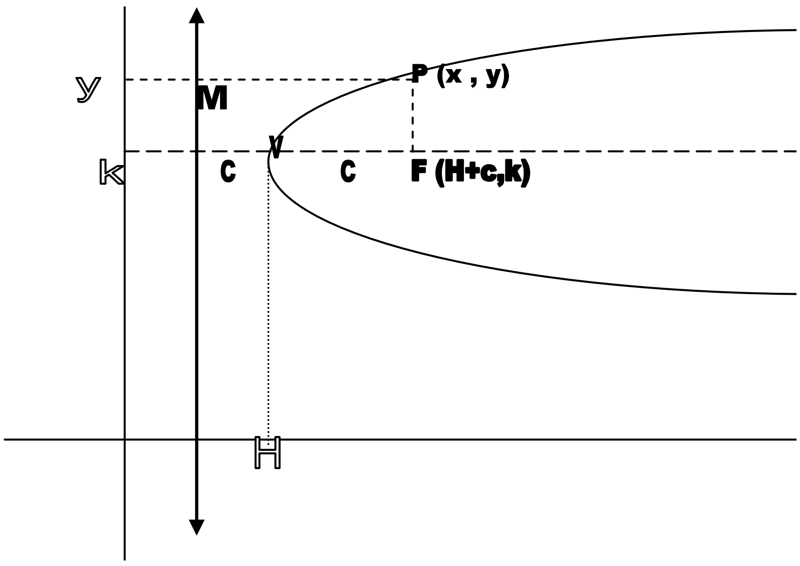
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

2. Hallar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

Remplazando:
$-2H = D \quad H = 8:2 = 4 \quad C\ (4,3)$
$-2K = E \quad K = 6:2 = 3$

MÉTRICA DE LA PARÁBOLA

Lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y de un punto llamado foco.



V (H , K) : vértice

P (x , y) : punto genérico

M (H-c , y) : punto de la directriz

F (H+c,k) : foco

c : distancia focal

PF = PM

$$\sqrt{(x-(H+c))^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(x-(H-c))^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-(H+c))^2 + (y-k)^2} = (x-(H-c)) \qquad /al^2$$

$$(x-(H+c))^2 + (y-k)^2 = (x-(H+c))^2$$

$$x^2 - 2x(H+c) + (H+c)^2 + (y-k)^2 = x^2 - 2x(H-c) + (H-c)^2$$

$$-2Hx - 2cx + h^2 + 2Hc + c^2 + (y-k) = -2Hx + 2cx + h^2 - 2Hc + c^2$$

$$(y-k)^2 = 4Hc - 4cx$$
$$y^2 - 2ky + k^2 = 4cx - 4cH$$

Ecuación Canónica

$$(y-k)^2 = 4c\,(x-H) \qquad (y-k)^2 = -4c\,(x-H)$$

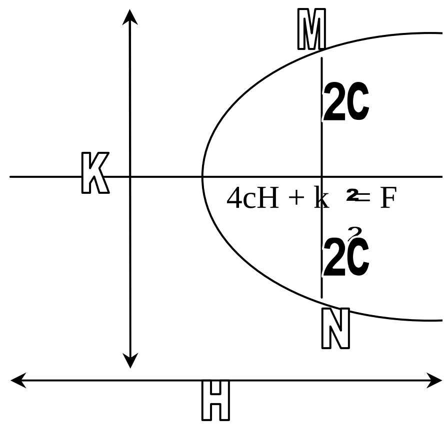
Análogamente:

$(x-H)^2 = 4c\,(y-k)$ $\qquad$ $(x-H)^2 = -4c\,(y-k)$

$y^2 - 2ky - 4cx + 4cH + k^2 = 0$

$-2k = D$

$-4c = E$



Ecuación general

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2 + Dy + Ex + F = 0 \\ \\ x^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{array}}$$

$(y-k) = 4c\,(x-H)$

Si $x = (H+c)$

$(y-k) = 4c$

$(y-k) = +\,2c$

$y = +\,2c + k$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } M\ (H+c, 2c+k) \\ \quad N\ (H+c, -2c+k) \end{array}}$$

$MN = \ ((H+c-(H+c)) + (2c+k))$

$MN = \ (0 + (2c+k+2c-k)$

$MN = \ (4c)$

$$\boxed{MN = 4c : \text{ lado Recto}}$$

<u>Ejemplos de Aplicación</u>

1) Hallar la parábola con vértice el punto (1,2) y lado recto igual a 20, y con directriz paralela al eje y sus ramas se extiende hacia el positivo.

$LR = 4c\ ;\ c = 5$

$(y-k)^2 = 4c\,(x-H)$ $\qquad$ $(y-2)^2 = 20\,(x-1)$

$y^2 - 2y + 4 - 20x - 20 = 0$

$y^2 - 2y - 20x - 16 = 0$

2) Hallar el lado recto de la parábola las cordenadas extremas de la parábola de ecuación canónica:

$(y-1)^2 = -12\,(x-1)$; de esto sacamos que :

V (1,1) y extiende sus ramas para el negativo, también la directriz es paralela al eje y.

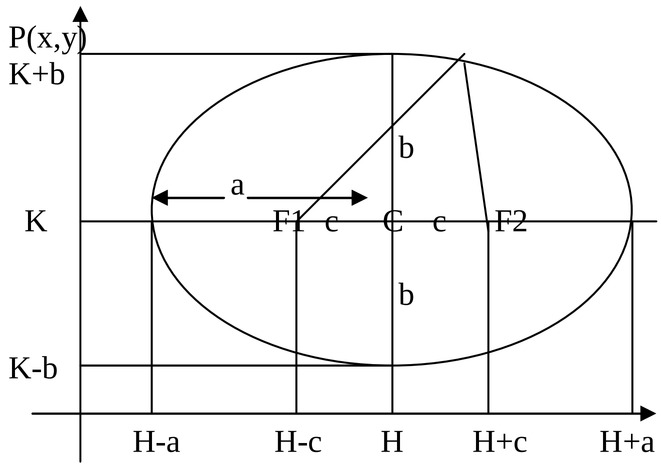
$LR = 12;\ C = 3$

$M\ (H+c, 2c+k)$ $\quad$ $M\ (1+3,\ 2*3+1)$ $\quad$ $M\ (4, 7)$

$N\ (H+c, -2c+k)$ $\quad$ $N\ (1+3, -2*3+1)$ $\quad$ $N\ (4, -5)$

METRICA DE LA ELIPSE

Lugar geométrico de los puntos que la suma de sus distancias desde dos puntos llamados focos es constante.



C(H,K)
F1(H-c,K)
F2(H+c,K)

$\overline{PF1} + \overline{PF2} = \overline{AF1} + \overline{AF2}$

$$\sqrt{(X-(H-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(X-(H+c))^2+(Y-K)^2}=\sqrt{(H-a-(H-c))^2+(k,k)^2}+\sqrt{((H-a)-(H+c))^2+(k-k)^2}$$

$$\sqrt{(X-(H-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(X-(H+c)^2+(Y-K)^2}=\sqrt{(H-a-H+c)^2}+\sqrt{(H-a-H-c)^2}$$

$$\sqrt{(X-(H-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(X-(H+c)^2+(y-k)^2}=-2a \qquad /al^2$$

$$X^2+H^2+c^2-2HX+2cX-2cH=4a^2-4a\sqrt{(X-(H+c))^2+(y-k)^2}+(X-(H+c))^2+(y-k)^2$$

$$(X-H+c)^2=4a^2-4a\sqrt{(X-(H+c))^2+(y-k)^2+(X-H-c)^2}$$

$$X^2+H^2+c^2-2HX+2cX-2cH=4a^2\sqrt{(X-(H+c))^2+(y-k)^2+(X-H-c)^2+X^2+H^2+c^2-2HX-2cX+2Hc}$$

$$4cX-4cH=4a^2=-4a\sqrt{(X-(H+c))^2+(y-k)^2+(X-H-c)^2} \quad /:-4$$

$$a^2+cH-cX=a\sqrt{(X-H-c)^2+(y-k)^2}$$

$$a^2-c(X-H)=a\sqrt{(X-H-c)^2+(y-k)^2} \qquad /al^2$$

$$a-2a^2c(X-H)+c^2(X-H)^2=a^2((X-H)^2-2c(X-H)+c^2)+a^2(y-k)^2$$

$$a-\ 2a^2c(X-H)+c^2(X-H)^2=a^2(X-H)^2-2a^2c(X-H)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

$$c^2(X-H)^2-a^2(X-H)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a \qquad /-1$$

$$a^2(X-H)^2-c^2(X-H)^2-a^2(y-K)^2=a-a^2c^2$$

$$a^2-c^2=b^2$$

$$(X-H)^2b^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

Ecuación Canónica

$$\boxed{\frac{(X-H)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

<u>Problemas de Aplicación</u>

1. Hallar la ecuación canónica de la elipse de centro (5,2) con un vértice en el punto (0,2) y foco (2,2).

c = 5-2= 3
Semieje mayor = 5 – 0=5

Semieje menor = $\sqrt{25 - 9} = 4$

$$\frac{(X-H)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(X-5)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$$

Hallar la ecuación canónica de la elipse con centro en el punto de origen, con foco (2,1) y vértice (2,4)

c = 1-0= 1
Semieje mayor = 4 – 0=4

Semieje menor = $\sqrt{16 - 1} = \sqrt{17}$

$$\frac{(X-H)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{X^2}{\sqrt{17}^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$